三角形是基本的原子渲染图元。图形硬件经过调整后可以迅速变成着色片段并放入帧缓冲区。但是，在建模系统中创建的对象和动画路径可能具有许多不同的基础几何描述。曲线和曲面可以通过方程式精确描述。计算这些方程式，然后创建三角形集并将其发送到要渲染的管线下。 使用曲线和曲面的好处至少有四方面：（1）它们具有比一组三角形更紧凑的表示形式；（2）它们提供可伸缩的几何图元；（3）与直线相比，它们提供更平滑和更连续的图元（4）动画和碰撞检测可能变得更简单，更快。

紧凑的曲线表示为实时渲染提供了多个优势。首先，可以节省用于模型存储的内存（因此可以提高内存缓存效率）。这对于通常不具有PC内存的游戏机特别有用。与对表示曲面的网格进行转换相比，转换曲面通常涉及的矩阵乘法更少。如果图形硬件可以直接接受此类曲面描述，则主机CPU必须发送到图形硬件的数据量通常比发送三角形网格要少得多。

弯曲的模型描述（例如PN三角形和细分曲面）具有值得一提的特性，即可以使多边形少的模型更具说服力和更真实。各个多边形被视为曲面，因此在曲面上创建了更多顶点。较高的顶点密度可以使表面和轮廓边缘的照明更好，质量更高。有关示例，请参见图17.1。

曲面的另一个主要优点是它们是可缩放的。 曲面描述可以转换为2个三角形或2000个三角形。曲面是实时进行细节建模的自然形式：当曲面对象靠近时，更密集地采样分析表示并生成更多三角形。 对于动画，曲面的优点是需要动画的点数量少得多。 这些点可以用于形成曲面，然后可以生成平滑的镶嵌。 同样，碰撞检测可能会更有效，更准确[**939,940**]。

弯曲和曲面的主题一直是整本书的主题[**458、777、1242、1504、1847**]。我们的目标是覆盖在实时渲染中常用的曲线和曲面。

17.1 参数曲线 2020年10月12日18点27分

在本节中，我们将介绍参数曲线。 这些用于许多不同的上下文中，并使用许多不同的方法来实现。 对于实时图形，参数曲线通常用于沿预定路径移动查看器或某些对象。 这可能涉及更改位置和方向。 但是，在本章中，我们仅考虑位置路径。有关方向插补的信息，请参见第4.3.2节。 如图17.2所示，另一个用途是渲染头发。

假设您要在一定时间内将摄像机从一个点移动到另一点，而与基础硬件的性能无关。 例如，假设照相机应在一秒钟内在这些点之间移动，并且一帧的渲染需要50毫秒。 这意味着我们将能够在此期间渲染20帧。 在速度更快的计算机上，一帧可能只花费25毫秒，相当于每秒40帧，因此我们想将相机移到40个不同的位置。 查找任意一组点都可以通过参数曲线来完成。

参数曲线使用一些公式作为参数的函数来描述点.在数学上,我们将其写为,这意味着该函数为的每个值提供一个点.参数可以属于某个称为域的区间,例如.生成的点是连续的,即,然后是.松散地说,这意味着如果是一个很小的数,则和是两个非常接近的点.

在下一节中,我们将以对B´ezier曲线（参数曲线的一种常见形式）的直观和几何描述开始，然后将其置于数学设置中.然后,我们讨论了如何使用分段B´ezier曲线,并解释了曲线连续性的概念.在第17.1.4节和第17.1.5节中,我们将介绍另外两个有用的曲线,即三次Hermites和Kochanek-Bartels样条曲线.最后,我们将在第17.1.2节中介绍使用GPU渲染B´ezier曲线的方法.

17.1.1 贝塞尔曲线

线性插值绘制出一条在和两点之间的直线路径.这很简单.参见图17.3的左图.给定这些点,以下函数描述了线性插值点,其中是曲线参数，:

参数控制点在直线上的哪个位置;且给我们一个在和之间的直线上的点.因此,如果我们想在一秒钟20步内将摄像机从线性地移动到,那么我们将使用,其中是帧号（从0开始到19结束） ）.

当仅在两个点之间进行插值时,线性插值可能就足够了,但是对于路径上的更多点,通常不行.例如,当内插多个点时,连接两个线段的点(也称为关节)的突然变化变得不可接受.如图17.3的右侧所示.

为了解决这个问题，我们进一步采用线性插值的方法，并反复进行线性插值.通过这样做,我们得出了Béezier（发音为beh-zee-eh）曲线的几何构造.作为历史记录,Béezier曲线是由Paul de Casteljau和Pierre B´ezier独立开发的,用于法国汽车工业.之所以称它们为B´ezier曲线,是因为即使de Casteljau在B´ezier之前发表了他的技术报告[458]，B´ezier仍能在de Casteljau之前公开发表他的研究.

首先,要能够重复插值,我们必须添加更多点.例如,可以使用称为控制点的三个点和.假设我们要找到,即的曲线上的点.我们使用,通过线性插值从和计算两个新点和.参见图17.4.最后,我们使用从和通过线性插值计算.我们定义.使用这种技术,我们得到以下关系:

这是一个抛物线,因为最大t的最大次数为2.实际上,在给定个控制点的情况下,曲线的度数为n.这意味着更多的控制点为曲线提供了更多的自由度。 第一级曲线是直线（称为线性），第二级曲线称为二次曲线，第三级曲线称为三次曲线，第四级曲线称为四次曲线，依此类推.

这种重复或递归的线性插值通常称为de Casteljau算法[458,777].使用1个控制点时的外观示例如图17.5所示,为了概括起见,而不是如本示例中那样使用点,而是使用以下表示法.控制点表示为,因此在示例中,和.然后,在已经进行了次线性插值之后,获得了中间控制点.在我们的示例中我们有和.可以使用以下所示的递归公式来描述个控制点的B´ezier曲线,其中是初始控制点:

注意,曲线上的一个点由描述.这并不像看起来那么复杂.再次考虑当我们从和的三个点(分别等于和)构造B´ezier曲线时会发生什么.三个控制点意味着.有时“(t)”会从处删除.在第一步中,,得到,而.最后,对于,我们得到,这与对的要求相同.图17.6给出了一般情况下工作原理的说明.

现在我们已经掌握了Béezier曲线如何工作的基础知识,现在我们可以看一下对相同曲线的更数学描述.

使用伯恩斯坦多项式的贝塞尔曲线 2020年10月13日18点38分

如公式17.2所示,可以使用代数公式来描述二次B´ezier曲线.事实证明,每个B´ezier曲线都可以用这样的代数公式来描述,这意味着您无需进行重复插值.这在下面的公式17.4中显示,得出的曲线与公式17.3中所述相同.贝塞尔曲线的这种描述称为伯恩斯坦形式:

该函数包含伯恩斯坦多项式,有时也称为B´ezier基函数,

此方程式中的第一项二项式系数在第1章的方程式1.6中定义.Bernstein多项式的两个基本属性如下:

第一个公式表示当也是从0到1时，Bernstein多项式处于0到1的区间内.第二个公式表示等式17.4中的所有Bernstein多项式项对于曲线的所有不同阶数之和等于1（这是 见图17.7）。 宽松地说，这意味着曲线将保持“接近”控制点.实际上,整个B´ezier曲线将位于控制点的凸包中(请参见我们的在线线性代数附录),这可根据公式17.4和17.6得出.在计算曲线的边界面积或体积时,这是一个有用的属性.有关示例,请参见图17.5.

在图17.7中,显示了和的伯恩斯坦多项式.这些也称为混合函数.(线性插值)的情况是说明性的,因为它表示曲线和.这意味着,当时,则,并且当增加时,的混合权重减小,而的混合权重增加相同的数量,并且权重的总和等于1.最后,当时,.通常,对于所有B´ezier曲线,且成立,也就是说,端点是被插值的(即在曲线上).的确,该曲线在时与向量相切,在时与相切.另一个有用的特性是,代替了计算B´ezier曲线上的点,然后旋转曲线时,可以先旋转控制点,然后可以计算曲线上的点.通常,控制点少于曲线上生成的点,因此先转换控制点效率更高.

作为有关B´ezier曲线的Bernstein版本如何工作的示例,假设,即二次曲线.等式17.4为

与公式17.2相同.请注意,上面的混合函数是显示在图17.7中间的函数.同样,三次曲线简化为

该方程可以重写为矩阵形式

这在进行数学简化时很有用.

通过在公式17.4中收集tk形式的项,可以看出,每条B´ezier曲线都可以用以下形式写成，称为幂形式,其中是通过收集项而掉落的点:

为了得到B´ezier曲线的导数,可以很容易地对公式17.4进行微分.重组和收集项后,结果显示在[458]中:

实际上,导数也是Bezier曲线,但比低1度.

B´ezier曲线的潜在缺点是它们不会通过所有控制点(端点除外).另一个问题是,程度随着控制点的数量而增加,从而使评估越来越昂贵.一种解决方案是在每对后续控制点之间使用一条简单的低度曲线,并确保这种分段插值具有足够高的连续性.这是第17.1.3-17.1.5节的主题.

实贝塞尔曲线

虽然B´ezier曲线可用于许多事情,但它们没有那么多的自由度,只能自由选择控制点的位置.同样,并非所有曲线都可以用B´ezier曲线来描述.例如,圆通常被认为是简单形状,但是不能由一个或一组B´ezier曲线定义.一种选择是有理Béezier曲线.此类曲线由公式17.12中所示的公式描述:

分母是伯恩斯坦多项式的加权和，而分子是标准B´ezier曲线的加权形式（公式17.4）.对于这种类型的曲线,用户拥有权重作为附加的自由度.有关这些曲线的更多信息,请参见Hoschek和Lasser的[777]和Farin的书[458].Farin还描述了如何用三个有理B´ezier曲线描述一个圆.

17.1.2 GPU上的有界贝塞尔曲线 2020年10月14日19点07分

将介绍一种在GPU上渲染B´ezier曲线的方法[**1068,1069**].具体来说,目标是“有界Béezier曲线”,其中曲线之间的区域以及第一个和最后一个控制点之间的直线被填充.通过使用专用像素着色器渲染三角形,可以实现一种非常简单的方法.

我们使用具有控制点和的二次曲线,即二阶B´ezier曲线.如果将这些顶点的纹理坐标设置为和,则在渲染三角形时将照常插值纹理坐标.我们还在每个像素的三角形内评估以下标量函数,其中和是插值的纹理坐标:

然后,像素着色器确定像素是在内部（），还是在外部.如图17.8所示.使用此像素着色器渲染透视投影的三角形时,我们将获得相应的投影的B´ezier曲线.Loop和Blinn [1068,1069]给出了一个证明.

例如，这种技术可用于呈现TrueType字体.如图17.9所示.Loop和Blinn还显示了如何渲染有理二次曲线和三次曲线,以及如何使用此表示进行抗锯齿.由于文本渲染的重要性,该领域的研究仍在继续.有关相关算法,请参见第15.5节.

17.1.3 连续性和分段贝塞尔曲线 2020年10月14日19点40分

假设我们有两条三次的B´ezier曲线,即分别由四个控制点定义.第一条曲线由定义,第二条曲线由定义,.要合并这些曲线,我们可以设置.这一点称为关节.但是,如图17.10所示,使用此简单技术将使关节不平滑.由多个曲线段(在这种情况下为两个)形成的合成曲线称为分段B´ezier曲线,在此表示为.此外,假设我们想要，以及.因此,当我们到达和的时间分别为和.有关符号,请参见图17.10.从上一节中我们知道,为定义了一条Béezier曲线，因此对于由定义的第一个曲线段来说,这是可行的,因为处的时间为0,处的时间为1.但是,当时会怎样？答案很简单:我们必须使用第二条曲线段,然后将参数间隔从转换并缩放为[0，1].使用以下公式完成此操作:

因此，将'馈入由定义的贝塞尔曲线段中.这很容易概括为将多个Bezier曲线缝合在一起.

连接这些曲线的一种更好的方法是利用这样一个事实,即在Béezier曲线的第一个控制点处,切线平行于(第17.1.1节).同样,在最后一个控制点,三次曲线与相切.这种行为可以在图17.5中看到.因此,为使两条曲线在切线处相切连接,第一条和第二条曲线的切线应在此处平行.更正式地说,以下内容应成立:

这仅表示关节处的传入切线应该与传出切线的方向相同.

通过在公式17.15中使用公式17.16[458]定义的,可以实现甚至更好的连续性:

这也显示在图17.10中.如果改为设置,则,因此,当每个曲线段上的时间间隔相等时,传入和传出切线向量应相同.但是,这在时不起作用.曲线看起来将相同,但是在复合曲线上移动的速度将不平滑.公式17.16中的常数可以解决这一问题.

使用分段曲线的一些优点是可以使用较低度的曲线，并且生成的曲线将经过一组点。在上面的例子中，对于两个曲线段中的每一个，使用度数为3，即立方。经常使用三次曲线，因为它们是可以描述S形曲线（称为拐点）的最低度曲线。所得曲线p（t）进行插值，即穿过点q0，q3 = r0和r3。

在这一点上，通过示例介绍了两个重要的连续性度量.接下来是曲线的连续性概念的数学表述。对于一般的曲线，我们使用Cn表示法来区分关节处不同类型的连续性。这意味着所有n个一阶导数在整个曲线上应该是连续且非零的。 C0的连续性意味着该段应在同一点连接，因此线性插值满足此条件。本部分的第一个示例就是这种情况。 C1的连续性意味着，如果我们在曲线上的任何一点（包括关节）导出一次，结果也应该是连续的。本节的第三个示例就是这种情况，其中使用了公式17.16。

还有一个度量值表示为Gn。 让我们以G1（几何）连续性为例。 为此，在关节处相遇的曲线段的切线矢量应平行且方向相同，但长度无关。 换句话说，G1的连续性比C1弱，并且C1的曲线始终是G1，除非两条曲线的速度在两条曲线的交汇点变为零且在交汇之前它们的切线不同。 几何连续性的概念可以扩展到更高的尺寸。 图17.10的中间图显示了G1连续性。

17.1.4 立方Hermite插值 2020年10月15日19点31分

贝兹曲线适合描述平滑曲线背后的理论,但有时无法预测.在本节中,我们将介绍三次Hermite插值,并且这些曲线往往更易于控制.原因是,三次曲线Hermite曲线不是由四个控制点来描述三次B´ezier曲线,而是由起点和终点和以及起点和终点切线和定义. Hermite插值,其中,为

**17.1.5 Kochanek-Bartels曲线** 2020年10月15日19点41分

在两个以上的点之间进行插值时,可以连接多个Hermite曲线.但是,这样做时,选择提供不同特性的共享切线会有自由度.在这里,我们将介绍一种计算此类切线的方法,称为Kochanek-Bartels曲线.假设我们有个点,,应插入个Hermite曲线段.我们假设在每个点只有一个切线,并且我们开始看“内”切线.可以将处的切线计算为两个和弦[917]:和的组合,如图17.13左侧所示.

首先,引入张力参数,该参数修改切线向量的长度.这控制了曲线在关节处的锐度.切线计算为

图17.13右侧的第一行显示了不同的张力参数.默认值为;较高的值会给出更锐利的弯曲(如果,则在关节处会出现一个环),而负值会使在关节附近的绷紧曲线更少.其次,引入一个影响切线方向(间接影响切线长度)的偏移参数.同时利用张力和偏移

其中默认值为.正偏向的弯曲更指向和弦,负偏向的弯曲更指向另一个和弦:.这在图17.13的右下一行中显示.用户既可以设置张力和偏置参数,也可以让它们具有默认值,这会产生通常称为Catmull-Rom样条曲线的信息[236].也可以使用这些公式计算第一个和最后一个点的切线,其中一个和弦的长度简单设置为零.

可以将控制关节行为的另一个参数并入切线方程[**917**].但是,这需要在每个关节处引入两个切线,一个切线表示为(对于源),一个切线表示为(对于目标).参见图17.14.注意,和之间的曲线段使用切线和.切线计算如下,其中是连续性参数:

同样,是默认值,这使.设置给出,并且,在接头处产生一个尖角,仅为.增加的值会使和越来越相似.对于,则.当达到时，我们得到以及.因此,连续性参数是向用户提供更多控制的另一种方式,并且如果需要的话,它可以使关节处出现尖角.

张力,偏移和连续性的组合(默认参数值为)为

仅当所有曲线段都使用相同的时间间隔长度时,方程17.20和17.22才起作用.为了说明曲线段的不同时间长度,必须像第17.1.3节中那样调整切线.调整后的切线表示为和,

其中.

17.1.6 B样条 2020年10月16日11点46分

在这里,我们将简要介绍B样条的主题,并且我们将特别关注立方均匀B样条.通常,B样条曲线与B´ezier曲线非常相似,可以表示为(使用位移基函数),(由控制点加权)和的函数:

在这种情况下,这是一条曲线,其中是x轴,是轴,控制点只是均匀分布的值.要获得更广泛的报道,请参见杀手B的著作[111],法林[458]以及霍舍克和拉塞尔的著作[777].

在这里,我们将遵循Ruijters等人[1518]的介绍,并介绍均匀三次B样条的特殊情况.基本函数由三部分缝合在一起:

图17.15左侧显示了此基本函数的构造.此函数在任何地方都具有连续性,这意味着如果将多个B样条曲线段缝合在一起,则合成曲线也将为.三次曲线具有连续性,通常,度为的曲线具有连续性.通常,基本函数如下创建.是一个“平方”函数，即如果,它为1,如果,它为0.5,否则为0.下一个基础函数是通过对积分来创建的,这为我们提供了一个帐篷函数.之后,通过对进行积分来创建基函数,该函数给出了更平滑的函数,即.重复此过程以获得,依此类推.

图17.15右侧说明了如何评估曲线段,其公式为

请注意,任何时候都只会使用四个控制点,这意味着曲线具有局部支持,即需要有限数量的控制点.使用定义函数为

Ruijters等人[1518]表明,这些可以重写

在图17.16中,我们显示了将两条均匀的三次B样条曲线缝合在一起的结果.一个主要优点是曲线是连续的,具有与基函数相同的连续性,在三次B样条曲线的情况下为.从图中可以看出,不能保证曲线会通过任何控制点.请注意,我们还可以为坐标创建B样条曲线,这将在平面中给出一条普通曲线（而不仅仅是一个函数）.这样得到的二维点将是,即简单的等式17.26的两种不同评估,一个是x,另一个是y.

我们已经展示了如何仅使用均匀的B样条曲线.如果控制点之间的间距不均匀,则方程将变得更加复杂,但更加灵活[**111,458,777**].